SiS1: Notes de classe

Lluís Batlle i Rossell *

6 d'octubre de 2001

1 Transformada de Fourier

1.1 Resposta freqüencial

Si tenim un *s.l.i.*, tenim una $h(t)$ (sortida de $\delta(t)$). Llavors, també es compleix que $y(t) = x(t) * h(t)$. L'objectiu que perseguim és buscar una relació entrada-sortida mitjançant una operació més senzilla que la de $*$.

Tenim:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

però coneixem una versió més complexa:

$$x(t) = x(-\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} x'(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

i per tant, la sortida del sistema és:

$$y(t) = T\left[x(-\infty)\right] + \int_{-\infty}^{\infty} x'(\tau)a(t-\tau)d\tau$$

així veiem que la relació entrada sortida necessita dos operadors més o menys complexes: derivació i convolució.

Tenim una autofunció $x(t) = e^{jw_0t}$ que si fós l'entrada, la sortida també tindria la mateixa base: $y(t) = ke^{jw_0t}$. Més concretament:

$$y(t) = T\left[e^{j2\pi f_0 t}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j2\pi f_0(t-\tau)}]d\tau = e^{j2\pi f_0 t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0\tau}d\tau$$

*e-mail: *viric@cataloniamail.com*

Exemple 1 *Donat $h(t) = \Pi(t)$, trobar $T\left[e^{j2\pi f_0 t}\right]$:*

$$\begin{aligned}
T\left[e^{j2\pi f_0 t}\right] &= e^{j2\pi f_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(\tau)e^{-j2\pi f_0 \tau}d\tau \\
&= e^{j2\pi f_0 t}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j2\pi f_0 \tau}d\tau \\
&= e^{j2\pi f_0 t}\frac{e^{-j2\pi f_0 \frac{1}{2}} - e^{j2\pi f_0 \frac{1}{2}}}{-j2\pi f_0} \\
&= e^{j2\pi f_0 t}\frac{\sin \pi f_0}{\pi f_0} = e^{j2\pi f_0 t}\underbrace{\mathrm{sinc}(f_0)}_{cnt.}
\end{aligned}$$

♢

Existeix una relació entre $\delta(t)$ i les exponencials complexes:

$$\begin{aligned}
\delta(t) &= \lim_{a\to\infty}\frac{\sin at}{\pi t} = \lim_{a\to\infty}\frac{e^{jat}-e^{-jat}}{2j\pi t} = \lim_{a\to\infty}\frac{e^{j2\pi f t}}{j2\pi t}\bigg|_{f=\frac{a}{2\pi}}^{f=\frac{a}{2\pi}} \\
&= \lim_{a\to\infty}\int_{-\frac{a}{2\pi}}^{\frac{a}{2\pi}} e^{j2\pi f t}df = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f t}df
\end{aligned}$$

i d'aquí obtenim:

$$\delta(t-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t-\tau)}df \tag{1}$$

per tant:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t-\tau)}df\right]d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{j2\pi f\tau}d\tau\right]e^{j2\pi f t}df \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f t}df \text{ on } X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
y(t) = T[x(t)] = T\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f t}df\right] &\overset{\text{s.l.i.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} X(t)T\left[e^{j2\pi f t}\right]df \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\right]e^{j2\pi f t}df \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\,H(f)e^{j2\pi f t}df
\end{aligned} \tag{3}$$

Exemple 2 *Donat $x(t) = e^{-\alpha|t|}$, hi apliquem un* s.l.i. *tal que la seva $h(t) =$*

$\Pi(t)$*:*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \;\; on \;\; X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-j2\pi f t} dt$$
$$= \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-j2\pi f t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j2\pi f t} dt$$

De (1) sabem que:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f t} df$$

Integrant el resultat de $x(t)$:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - j2\pi f)t} dt = \left.\frac{e^{(\alpha - j2\pi f)t}}{\alpha - j2\pi f}\right|_{-\infty}^{0} = \frac{1+0}{\alpha - j2\pi f} \\ \displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j2\pi f)t} dt = \left.\frac{e^{-(\alpha + j2\pi f)t}}{-(\alpha + j2\pi f)}\right|_{0}^{\infty} = \frac{0-1}{-(\alpha + j2\pi f)} \end{array}\right\}$$

obtenim:

$$X(t) = \frac{1}{\alpha - j2\pi f} + \frac{1}{\alpha + j2\pi f} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$

I d'aquí podem trobar:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} \operatorname{sinc}(f)}_{Y(f) = X(f)\,H(f)} e^{j2\pi f t} df$$

$\diamondsuit$

El que fem és obtenir $X(t)$ de $x(t)$, i $H(t)$ de $h(t)$, mitjançant la següent correspondència:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} df$$

i de $X(t)$ i $H(t)$ obtenim $Y(t)$. Llavors, "destransformem", i obtenim una altra vegada $y(t)$. Així aconseguim fer el pas que necessitavem i no podiem fer: la *desconvolució*.

Obtenim la següent relació, **molt important**, que és la culminació de l'objectiu plantejat:

$$\boxed{H(t) = \frac{Y(t)}{X(t)}}$$