Formulari de Telecos

Lluís Batlle i Rossell *

21 de maig de 2002
Última actualització: 27 de febrer de 2003

*e-mail: *vindicator@jazzfiesta.com*

1 Constants

1.1 Camps electromagnètics

Constant	*Variable*	*Valor*	*Unitats*
Permitivitat del buit	ϵ_0	$8.85418782 \cdot 10^{-12}$	F/m
Permeabilitat del buit	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$	H/m
Velocitat de la llum	c	$2.99792458 \cdot 10^{8}$	m/s
Impedància intrínseca del buit:	η_0	376.73	Ω
Càrrega de l'electró:	e	$1.602177 \cdot 10^{-19}$	C
Constant de Boltzmann:	k	$1.3806 \cdot 10^{-23}$	J/K
Constant de Planck:	h	$6.62607 \cdot 10^{-34}$	$J \cdot s$

2 Matemàtiques

2.1 Trigonometria

Les multiplicacions de senoides són:

1. $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$
2. $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}$
3. $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$
4. $\cos^2(a) = 1 - \sin^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
5. $\cos^3(a) = \dfrac{\cos(3a) + 3\cos(a)}{4}$
6. $\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

Les senoides de sumes i restes són:

1. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
2. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
3. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
4. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

Relació entre senoides i els seus arcs:

$$\cos(\arcsin x) = \sin(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

2.2 Complexes

$$\Re(x)\Re(y) = \frac{x+x^*}{2}\frac{y+y^*}{2} = \frac{1}{2}\Re(xy + xy^*)$$
$$\Im(x)\Re(y) = \Re(-jx)\Re(y) = \frac{1}{2}\Im(xy + xy^*)$$

2.3 Sèries

Tenim que les sèries són de la forma:

$$\sum_{n=1}^{N} x_n = S_N$$

- Geomètriques (condició de convergència: $|r| < 1$):

$$x_n = ar^{n-1}$$
$$S_N = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

- Telescòpiques:

$$x_n = \varphi(n) - \varphi(n+1)$$
$$S_N = \varphi(1) - \lim \varphi(n+1)$$

- Hipergeomètriques (condició de convergència: $\delta > \alpha + \beta$):

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \delta}$$
$$S_\infty = \frac{\delta x_1}{\delta - \alpha - \beta}$$

2.4 Aproximacions

2.4.1 Desenvolupament de Taylor

El desenvolupament limitat de Taylor d'ordre n de f en a es pot fer si $f : U \to \mathbb{R}$ és una funció $n-1$ vegades derivable en U (entorn del punt $a \in \mathbb{R}$ i n vegades derivable en a). El desenvolupament és:

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x)$$

on $r_n(x) = o[(x-a)^n]$ i essent

$$p_n(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} (x-a)^i \frac{f^{(i)}(a)}{i!}$$

A $p_n(x)$ se l'anomena el *polinomi de Taylor* de grau n de f en a. Si $a = 0$, el desenvolupament i el seu polinomi s'anomenen de Mac Laurin.

A continuació hi ha una taula amb desenvolupaments limitats d'algunes funcions elementals:

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$ $(\forall x \in \mathbb{R})$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$ $(\forall x \in \mathbb{R})$
4. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$
5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$ $(x > -1)$
6. $(1+x)^a = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} + o(x^n)$ $(x > -1)$

2.4.2 Polinomis de Chebychev

Els *polinomis de Chebychev* són equivalents a:

$$C_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos x) & |x| \leq 1 \\ \cosh(n \arccos x) & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Fórmula general:

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} x^{n-2k}(x^2-1)^k$$

Fórmula recursiva:

$$\begin{aligned} C_0(x) &= 1 \\ C_1(x) &= x \\ C_n(x) &= 2xC_{n-1}(x) - C_{n-2} \end{aligned}$$

2.5 Integració

2.5.1 Integral per parts

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

2.5.2 Integrals immediates

1. $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^p+1}{p+1}$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x)$
3. $\displaystyle\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x$
4. $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x$
5. $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x$
6. $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x}$
8. $\displaystyle\int (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x$
9. $\displaystyle\int \frac{-1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \cot x$
10. $\displaystyle\int \sinh\,\mathrm{d}x = \cosh x$

11. $\int \cosh \, \mathrm{d}x = \sinh x$

12. $\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \arctan x$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x$

14. $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arccos x$

15. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x = \operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

16. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \mathrm{d}x = \operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

17. $\int \frac{1}{1-x^2} \mathrm{d}x = \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$

2.5.3 Teorema de Cauchy-Schwartz

Si considerem U i V funcions complexes, tenim que:

$$\int |U|^2 \int |V|^2 \geq \left| \int UV^* \right|^2$$

2.6 Vectors

2.6.1 Definicions

Coordenades rectangulars ($A = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, $f = f(A)$):

1. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$

2. $\nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

3. $\nabla \times A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z}$

4. $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

5. $\nabla^2 A = \nabla^2 A_x \hat{x} + \nabla^2 A_y \hat{y} + \nabla^2 A_z \hat{z} = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla \times (\nabla \times A)$

Coordenades cilíndriques:

1. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$

2. $\nabla \cdot A = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

3. $\nabla \times A = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \hat{z}$

4. $\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

5. $\nabla^2 A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla \times (\nabla \times A)$

Coordenades esfèriques:

1. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{\partial f}{r\,\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\hat{\phi}$
2. $\nabla \cdot A = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$
3. $\nabla\times A = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\phi}$
4. $\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$
5. $\nabla^2 A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla \times (\nabla \times A)$

2.6.2 Identitats

1. $(A \times B)\cdot C = A \cdot (B \times C)$
2. $A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$
3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
4. $\nabla(a/b) = (1/b)\nabla a - (a/b^2)\nabla b$
5. $\nabla(A \cdot B) = (B \cdot \nabla)A + (A \cdot \nabla)B + B \times (\nabla \times A) + A \times (\nabla \times B)$
6. $\nabla \cdot (fA) = (\nabla f)\cdot A + f(\nabla \cdot A)$
7. $\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B) = \nabla A \times B + A\nabla \times B$
8. $(\nabla \cdot \nabla) f = \nabla^2 f$
9. $\nabla \times (\nabla f) = 0$
10. $\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$
11. $\nabla \times (fA) = (\nabla f) \times A + f(\nabla \times A)$
12. $\nabla \times (A \times B) = (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B + (\nabla \cdot B)A - (\nabla \cdot A)B$
13. $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$
14. $A \cdot (B \times C) = C \cdot (A \times B)$

2.6.3 Vectors unitaris

Coordenades cilíndriques - rectangulars:

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi\\ \hat{\phi} &= -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi\\ \hat{z} &= \hat{z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \hat{\rho}\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi\\ \hat{y} &= \hat{\rho}\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi\\ \hat{z} &= \hat{z}\end{aligned}$$

Coordenades esfèriques - rectangulars:

$$
\begin{aligned}
\hat{r} &= \hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta \\
\hat{\theta} &= \hat{x}\cos\theta\cos\phi + \hat{y}\cos\theta\sin\phi - \hat{z}\sin\theta \\
\hat{\phi} &= -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{x} &= \hat{r}\sin\theta\cos\phi + \hat{\theta}\cos\theta\cos\phi - \hat{\phi}\cos\phi \\
\hat{y} &= \hat{r}\sin\theta\sin\phi + \hat{\theta}\cos\theta\sin\phi + \hat{\phi}\sin\phi \\
\hat{z} &= \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta
\end{aligned}
$$

Coordenades cilíndriques - esfèriques:

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho} &= \hat{r}\sin\theta + \hat{\theta}\cos\theta \\
\hat{\phi} &= \hat{\phi} \\
\hat{z} &= \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{r} &= \hat{\rho}\sin\theta + \hat{z}\cos\theta \\
\hat{\theta} &= \hat{\rho}\cos\theta - \hat{z}\sin\theta \\
\hat{\phi} &= \hat{\phi}
\end{aligned}
$$

3 Transformada de Fourier

3.1 Convolució

Definim l'operador de convolució $*$ com:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}z$$

3.1.1 Propietats

La convolució és *associativa*:

$$z(t) = x(t) * [y(t) * h(t)] = [x(t) * y(t)] * h(t) = x(t) * y(t) * h(t)$$

La convolució és *distributiva respecte a la suma*:

$$z(t) = h(t) * [x(t) + y(t)] = h(t) * x(t) + h(t) * y(t)$$

Suposant que $y(t) = x(t) * h(t)$:

- $y(-t) = x(-t) * h(-t)$
- $y^*(t) = x^*(t) * h^*(t)$
- $y(t-t_0) = x(t-t_0) * h(t) = x(t) * h(t-t_0)$

3.2 Transformació

En el domini freqüencial:

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$
$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

En el domini pulsatori:

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

3.3 Propietats

Linealitat:

$$\mathcal{F}[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1X_1(f) + a_2X_2(f)$$

Conjugació:

$$\mathcal{F}[x^*(t)] = X^*(-f)$$

Simetries:

$$x(t)\text{parell} \iff X(f)\text{parell}$$
$$x(t)\text{imparell} \iff X(f)\text{imparell}$$

Si $x(t)$ és Real: $X(f) = X^*(-f)$
Si $x(t)$ és Imaginari: $X(f) = -X^*(-f)$

3.3.1 Retard

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = e^{-j2\pi ft_0}X(f)$$

Com a conseqüència d'aquesta pròpietat, un filtre ideal corresponent a un *s.l.i.* definit per $H(f)$ ha de tenir mòdul constant i fase lineal:

$$Y(f) = X(f)\,H(f) = kX(f)\,e^{-j2\pi ft_0} \Rightarrow H(f) = k\,e^{-j2\pi ft_0}$$

Escalat:

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{|a|}X(\frac{1}{a})$$

Dualitat:
Si $\mathcal{F}[x(t)] = X(f) : \mathcal{F}[X(t)] = x(-f)$
Si $\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega) : \mathcal{F}[X(t)] = 2\pi x(-\omega)$
Modulació:

$$\mathcal{F}[x(t)\,e^{j2\pi f_0t}] = X(f - f_0)$$

3.3.2 Convolució i producte

Si $\mathcal{F}[x(t)] = X(f)$:

$$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f)Y(f)$$
$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) * Y(f)$$

Si $\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega)$:

$$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)Y(\omega)$$
$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$$

4 Comunicacions

4.1 Correlació i Espectre

1. $S_{xy}(\omega) = X(\omega)\, Y^*(\omega)$
2. $E_{xy} = \frac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega)\, d\omega = R_{xy}(0) \geqslant R_{xy}(\tau)$
3. $P_{xx} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T S_{xx}(\omega)\, d\omega$
4. $R_{xy}(\tau) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\, y^*(t)\, dt = x(\tau) * y^*(-\tau)$
5. $R_{xy}(\tau) = R^*_{yx}(-\tau)$
6. $R_{yx}(\tau) = h(\tau) * R_{xx}(\tau)$
7. $R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau) = R_{yx}(\tau) * h^*(-\tau)$

4.2 Processos

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t+\tau)\, y^*(t)]$$

$$P_m = R(0)$$

4.3 Transmissió

$$L = \frac{P_e}{P_s}$$

$$\frac{P_s}{P_e} = G_T G_R \left(\frac{\lambda}{4\pi l}\right)^2$$

4.4 Transformada de Hilbert

1. $A_x(\omega) = 2X(\omega)u(\omega)$
2. $a_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$
3. $\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}$
4. $x(t) = \frac{1}{\pi}\Re\left[\int_0^\infty X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\right]$
5. $\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\Im\left[\int_0^\infty X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\right]$
6. $\hat{X}(\omega) = -j\,\mathrm{sign}(\omega)\,X(\omega)$

4.4.1 Correlació

Si $x(t)$ és un senyal passa-banda, $a_x(t)$ la seva part analítica i $b_x(t)$ l'equivalent pas baixes:

1. $R_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) = R_{xx}(\tau)$
2. $R_{x\hat{x}}(\tau) = -\hat{R}_{xx}(\tau) = -R_{\hat{x}x}$
3. $R_{a_x}(\tau) = 2\left[R_x(\tau) + j\hat{R}_x(\tau)\right]$
4. $R_{b_x}(\tau) = 2\left[R_{i_x}(\tau) + jR_{q_x i_x}(\tau)\right]$
5. $R_{a_x a_{x^*}}(\tau) = R_{b_x b_{x^*}}(\tau) = 0$
6. $R_{b_x}(\tau) = R_{a_x}(\tau)e^{-j\omega_0\tau}$
7. $R_{i_x}(\tau) = R_{q_x}(\tau) = \frac{1}{2}\Re[R_{b_x}(\tau)] = R_x(\tau)\cos\omega_0\tau\ + \hat{R}_x(\tau)\sin\omega_0$
8. $R_{q_x i_x}(\tau) = \frac{1}{2}\Im[R_{b_x}] = \hat{R}_x(\tau)\cos\omega_0\tau\ - R_x(\tau)\sin\omega_0\tau = -R_{q_x i_x}(\tau)$

Propietats de les correlacions:

$$R_{i_x q_x}(\tau) = -R_{q_x i_x}(\tau) = R_{q_x i_x}(-\tau) = -R_{i_x q_x}(-\tau)$$

Potència del senyals en fase i en quadratura:

$$P_{i_n} = P_{q_n} = R_{i_n i_n}(0) = R_{q_n q_n}(0) = R_{nn}(0) = P_n$$

4.4.2 Espectre

Si $n(t)$ és un senyal passa-banda:

$$S_{i_n i_n}(\omega) = S_{nn}(\omega - \omega_0)\,u(-\omega + \omega_0) + S_{nn}(\omega + \omega_0)\,u(\omega + \omega_0)$$

$$S_{q_n i_n}(\omega) = jS_{nn}(\omega - \omega_0)\,u(-\omega + \omega_0) - jS_{nn}(\omega + \omega_0)\,u(\omega + \omega_0)$$

Espectres dels processos:

$$S_{a_n}(f) = 4S_n(f)u(f)$$

$$S_{b_n}(f) = 4S_n(f + f_0)u(f + f_0) = 2[S_{i_n}(f) + jS_{q_n i_n}(f)]$$

4.4.3 Retards de fase i de grup

$$t_{ph} = -\frac{\varphi_H(\omega_0)}{\omega_0}$$

$$t_{gr} = \left.\frac{d\varphi_H(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}$$

4.4.4 Senyals en fase i quadratura

Si $x(t)$ és un senyal passa-banda:

$$x(t) = i_x(t)\cos\omega_0 t\ - q_x(t)\sin\omega_0 t = \Re[b_x(t)\, e^{j\omega_0 t}]$$

$$x(t) = e(t)\cos(\omega_0 t + \phi(t)\,) \text{ on } e(t) = \sqrt{i_x(t)^2 + q_x(t)^2}, \phi(t) = \arctan\frac{q_x(t)}{i_x(t)}$$

$$\hat{x}(t) = i_x(t)\sin\omega_0 t\ + q_x(t)\cos\omega_0 t = \Im[b_x(t)\, e^{j\omega_0 t}]$$

$$i_x(t) = x(t)\cos\omega_0 t\ + \hat{x}(t)\sin\omega_0 t = \Re[a_x(t)\, e^{-j\omega_0 t}]$$

$$q_x(t) = -x(t)\sin\omega_0 t\ + \hat{x}(t)\cos\omega_0 t = \Im[a_x(t)\, e^{-j\omega_0 t}]$$

5 Camps elèctromagnètics

5.1 Relacions bàsiques entre variables

1. Longitud d'ona: $\lambda = \frac{v}{f}$
2. Velocitat de l'ona: $v = \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$
3. Pulsació de l'ona: $\omega = 2\pi f$
4. Impedància intrínseca del medi: $\eta = \mu v$
5. Nombre d'ona: $k = \frac{\omega}{v}$

En ones electromagnètiques en règim sinusoidal permanent tenim que els fasors compleixen la següent relació:

$$\vec{H} = \frac{\vec{k}}{\eta} \times \vec{E}$$

5.2 Lleis de Maxwell

5.2.1 Forma integral al buit

Lleis de Gauss:

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{B}\, d\vec{s} = 0$$

Llei de Maxwell-Faraday:

$$\oint_C \vec{E}\, d\vec{l} = \frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\, d\vec{s}$$

Llei d'Ampère-Maxwell:

$$\oint_C \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \int_S \frac{d\vec{E}}{dt}\, d\vec{s} \right)$$

Equació de continuitat:

$$\oint_S \vec{J}\, d\vec{s} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv$$

5.2.2 Forma diferencial al buit

Lleis de Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Llei de Maxwell-Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Llei d'Ampère-Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \frac{\partial(\varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t} \right)$$

Equació de continuitat:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

5.3 Condicions de contorn

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f$$
$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$
$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$
$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_!) = \vec{J}_{sf}$$

5.4 Incidència d'ones planes sobre la superfície de separació de dos dielèctrics

Essent i l'angle d'incidència, r el reflexat i t el transmès, i les ones incidents amb polarització lineal, aquesta és la *Llei d'Snell*:

$$\sin t = \frac{n_1}{n_2} \sin i$$

Les *fórmules de Fresnel* per a incidència amb $\vec{E}$ perpendicular o paral·lel al pla d'incidència, i tenint que el coeficient de reflexió és $\rho = \frac{E_{or}}{E_{oi}}$ i el de transmissió $\tau = \frac{E_{ot}}{E_{oi}}$:

$$\frac{1}{\eta_1}(1 - \rho_\perp)\cos i = \frac{\tau_\perp}{\eta_2}\cos t$$

$$\rho_\perp = \frac{\eta_2 \cos i - \eta_1 \cos t}{\eta_2 \cos i + \eta_1 \cos t} = \frac{n_1 \cos i - n_2 \cos t}{n_1 \cos i + n_2 \cos t}$$

$$\tau_\perp = \frac{2\eta_2 \cos i}{\eta_2 \cos i + \eta_1 \cos t}$$

En el cas d'incidència de $\vec{E}$ paral·lela al pla d'incidència tenim:

$$\rho_\parallel = \frac{\eta_2 \cos t - \eta_1 \cos i}{\eta_2 \cos t + \eta_1 \cos i} = \frac{n_1 \cos t - n_2 \cos i}{n_1 \cos t + n_2 \cos i}$$

$$\tau_\parallel = \frac{2\eta_2 \cos i}{\eta_2 \cos t + \eta_1 \cos i}$$

El *coeficient de Fresnel* és el que correspon a $i = 0 \Rightarrow t = 0$, i correspon a:

$$\rho_\parallel = \rho_\perp = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

5.4.1 Cancel·lació de l'ona reflexada

L'*angle de Brewster* és en el que es cancel·la l'ona reflexada. Es pot dir que $\exists\, i = i_B \,/\, \rho_\parallel(i_B) = 0$. Aquest angle és tal que:

$$t = \frac{\pi}{2} - i = \arctan \frac{n_2}{n_1}$$

i per aconseguir que $\rho_\perp = 0$, s'ha de complir

$$i = t \Rightarrow n_1 = n_2$$

cosa que significa que $\rho_\perp(i) \neq 0 \quad \forall\, i$.

5.4.2 Reflexió total

Correspon a la cancel·lació del raig transmès (no l'ona). Només pot passar sii $n1 > n2$, i es dóna quan incidim amb un angle $i > i_c \,/\, i_c = \sin^{-1} \frac{n_2}{n_1}$. A més, passa per les dues polaritzacions.

En el cas de reflexió total, $\rho, \tau \in \mathbb{C}$ i $|\rho| = 1$. També tenim que $t = \frac{\pi}{2} - j\gamma \in \mathbb{C}$, on $\sin t > 1$ i $\cos t = -j\gamma$. Al final, l'ona complexa acaba essent de la forma:

$$e^{-j\vec{k_t}\vec{r}} = e^{-jk_0 n_2 y \sin t} \underbrace{e^{k_0 n_2 \gamma z}}_{\text{evanescent}}$$

on el factor $e^{-\alpha z}$ compleix que:

$$\alpha = k_0 n_2 \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2 i - 1}$$

5.5 Guies d'ona

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$$

$$f_c = \frac{v}{2}\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}$$

5.6 Conductors

$$k = \beta - j\alpha$$

$$\beta_1 = k_1\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}\right)}$$

$$\alpha_1 = k_1\sqrt{\frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}\right)}$$

La *tangent de pèrdues* és $\tan\delta$, i si aquesta és $>> 1$ tindrem un bon conductor, i si és $<< 1$ en tindrem un de dolent:

$$\tan\delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$$

Impedància d'un conductor:

$$\eta = \eta_0 \frac{e^{j\frac{\delta}{2}}}{(1 + \tan^2\delta)^{\frac{1}{4}}}$$