La transformada de Laplace

Lluís Batlle i Rossell *

5 de juliol de 2003

Resum

Document que explica el funcionament i el rerafons matemàtic de la transformada de Laplace, aplicada a les equacions diferencials i remarcant el seu ús en l'electrònica. És una traducció del document *La transformada de Laplace* del *Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica* de la *UPC*.

1 Introducció

La transformada de Laplace és un mètode directe i potent de resolució de problemes de valor inicial per a equacions i sistemes d'equacions diferencials lineals amb coeficients constants.

L'ús de la transformada de Laplace en aquest contexte, i en particular la seva aplicació a l'enginyeria elèctrica, no va començar fins els anys trenta d'aquest segle – segle i mig després de que Laplace introduís la seva transformada – com a conseqüència dels treballs de Van der Pol i Doestch, que van dur a abandonar el càlcul operacional de Heaveside d'aplicació més restringida i incòmoda, i carent llavors d'una justificació adequada.

Presentem el mètode de la transformada de Laplace simplement com un artifici que ens permet transformar una equació diferencial junt amb les condicions inicials adequades en una equació algebraica. Així la seva utilització pot comparar-se amb l'ús de logaritmes que ens permet, per exemple, reduir el problema de calcular el producte de dos números al problema més simple de sumar els seus logaritmes. Tant en un cas com en l'altre s'haurà d'efectuar prèviament una transformació i posteriorment la inversió de la transformació.

En particular estudiarem l'aplicació al cas d'equacions diferencials amb segons membres discontinus, cas en el que el mètode de la transformada de Laplace es mostra especialment útil.

Comencem definint formalment la transformada de Laplace.

*e-mail: *vindicator@jazzfiesta.com*

Definició 1 *Sigui f una funció real definida per a $0 \leq t < \infty$, la* transformada de Laplace *de $f(t)$, que designarem per $\mathcal{L}\{(\mathcal{T})$ o per $F(s)$, funció de la variable real s.*

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f(t) \mathrm{d}t \tag{1}$$

Exemples

1. $f(t) = 1$
$$F(s) = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} \mathrm{d}t = \lim_{A\to\infty} \frac{1 - e^{-sA}}{s} = \frac{1}{s}$$
si $s > 0$, no existint límit finit si $s \leq 0$.

   D'ara en endavant escriurem directament $\int_0^\infty$ en comptes de $\lim_{A\to\infty} \int_0^A$.

2. $f(t) = t$. Per a $s > 0$, integrant per parts s'obté
$$F(s) = \int_0^\infty t e^{-st} \mathrm{d}t = \frac{1}{s^2} \qquad (s > 0)$$

3. $f(t) = e^{\alpha t}$
$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{\alpha t} \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t} = \frac{1}{s - \alpha} \qquad (s > \alpha)$$

4. $f(t) = \cos \beta t$, $g(t) = \sin \beta t$. Es poden determinar les seves transformades de Laplace directament com en els exemples anteriors (exercici), però resulta més còmoda la seva obtenció formal utilitzant la fórmula d'Euler $e^{j\beta t} = \cos \beta t + j \sin \beta t$:
$$\begin{aligned} F(s) + jG(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \cos \beta t \mathrm{d}t + j \int_0^\infty e^{-st} \sin \beta t \mathrm{d}t = \\ &= \int_0^\infty e^{-st} (\cos \beta t + j \sin \beta t) \mathrm{d}t = \\ &= \int_0^\infty e^{-st} e^{j\beta t} \mathrm{d}t = \frac{1}{s - j\beta} = \frac{s + j\beta}{s^2 + \beta^2} \qquad (s > 0) \end{aligned}$$
amb el que igualant parts reals i imaginàries s'arriba a
$$F(s) = L\{\cos \beta t\} = \frac{s}{s^2 + \beta^2} \qquad G(s) = L\{\sin \beta t\} = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$$

5. La funció $f(t) = e^{t^2}$ no admet transformada de Laplace, ja que quan $A \to \infty$
$$\int_0^A e^{-st} e^{t^2} \mathrm{d}t \quad \longrightarrow \quad +\infty$$
qualsevol que sigui s. En efecte, fixat s
$$e^{-st} e^{t^2} = e^{t(t-s)} > e^t$$

per a $t > s+1$, i per tant per $A > s+1$

$$\int_0^A e^{-st}e^{t^2}\mathrm{d}t > \int_{s+1}^A e^t\mathrm{d}t = e^A - e^{s+1}$$

que tendeix a $+\infty$, quan $A \to +\infty$.

Com observem en aquests exemples la transformada de Laplace d'una funció $f(t)$ pot no existir per a alguns valors de $s \in \mathbb{R}$ i fins itot, com en l'últim exemple, pot passar que no existeixi per a cap valor de s. Per a garantir l'existència de la transformada de Laplace hem d'assegurar-nos primer l'existència per a cada $A > 0$ de la integral

$$\int_0^A e^{-st}f(t)\mathrm{d}t$$

per la qual només fa falta que la restricció de f a cada interval finit $0 \leq t \leq A$ sigui continua a trossos. A continuació necessitem la convergència de la integral en l'interval $(0,\infty)$, és a dir l'existència del límit

$$\lim_{A\to 0}\int_0^A e^{-st}f(t)\mathrm{d}t$$

per a certs valors de s que constituiran llavors el domini de definició de la funció transformada F. Anem a veure si f és una *funció d'ordre exponencial* γ, és a dir si existeix una constant M per la qual

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t} \qquad\qquad 0 \leq t < +\infty \tag{2}$$

llavors la integral convergeix per a tot $s > \gamma$. En efecte, es tindrà

$$|e^{-st}f(t)| = e^{-st}|f(t)| \leq Me^{-st}e^{\gamma t}$$

i per tant per a $s > \gamma$

$$\int_0^A |e^{-st}f(t)|\mathrm{d}t \leq M\int_0^A e^{-(s-\gamma)t}\mathrm{d}t \leq M\int_0^\infty e^{-(s-\gamma)t}\mathrm{d}t = \frac{M}{s-\gamma} \tag{3}$$

independentment de A, pel que la integral

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)\mathrm{d}t$$

és absolutament convergent i per tant convergent.

Acabem de demostrar així el següent resultat:

Teorema 1 (d'existència de la transformada de Laplace) *Donada* $f(t)$, $0 \leq t < +\infty$, *si*

1. *la restricció de* f *a cada interval finit és continua a trossos*
2. f *és d'ordre exponencial* γ

llavors la seva transformada de Laplace $F(s)$ *existeix per a* $s > \gamma$.

Les funcions que satisfan 1 i 2 (per a algun γ) es denominaran *funcions admisibles*. La classe de funcions admissibles és suficientment àmplia per la major part de les aplicacions. Inclou, per exemple, a tots els polinomis, a la funció exponencial i a les funcions periòdiques que siguin contínues a trossos en cada període. També la suma i el producte de les funcions admissibles són funcions admissibles.

A partir d'ara, per una funció admissible f d'ordre exponencial γ, considerarem $F(s)$ definida per a $s > \gamma$.

2 Primeres propietats i aplicació a equacions diferencials

Com suggereix la notació $F(s) = L\{f(t)\}$, L és un operador que tranforma "fucions de t"en "funcions de s". És més, es tracta d'un operador lineal:

Propietat 1 (Linealitat) *Si $f(t)$ i $g(t)$ són dues funcions admissibles i a i b són constants, la funció $af(t) + bg(t)$ és admissible i*

$$L\{af(t) + bg(t)\} = aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\} \tag{4}$$

En efecte,

$$\begin{aligned} L\{af(t) + bg(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}(af(t) + bg(t))\mathrm{d}t = \\ &= a\int_0^\infty e^{-st}f(t)\mathrm{d}t + b\int_0^\infty e^{-st}g(t)\mathrm{d}t = \\ &= aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\} \end{aligned}$$

La utilitzt de la transformació de Laplace en la resolució d'equacions diferencials es basa en la següent propietat de derivació, la qual expressa que, essencialment, derivar $f(t)$ equival a multiplicar $F(s)$ per s. Tenint en compte que si $f'(t)$ és admissible $f(t)$ també ho és, es té

Propietat 2 (Derivació) *Si $f'(t)$ és admissible*

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0) \tag{5}$$

i en general, si $f^{(n}(t)$ és admissible

$$L\{f^{(n}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \ldots - sf^{(n-2}(0) - f^{(n-1}(0) \tag{6}$$

En efecte, integrant per parts es té

$$\begin{aligned} L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)\mathrm{d}t = e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\mathrm{d}t = \\ = -f(0) + sL\{f(t)\} = sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

Per a $f''(t)$ es tindrà ara

$$\begin{aligned} L\{f''(t)\} &= sL\{f'(t)\} - f'(0) = s(sF(s) - f(0)) - f'(0) = \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

i en general

$$\begin{aligned}L\{f^{(n}(t)\} &= sL\{f^{(n-1}(t)\} - f^{(n-1}(0) = \\ &= s(s^{n-1}F(s) - s^{n-2}f(0) - \ldots - f^{(n-2}(0)) - f^{(n-1}(0) = \\ &= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \ldots - sf^{(n-2}(0) - f^{(n-1}(0)\end{aligned}$$

Observació 1 *Escrivim $f(0)$ (i anàlogament $f'(0)$) suposant que f està definida per $t=0$. De no ser així, al ser f admissible i per tant contínua a trossos, ha d'existir $f(0^+) = \lim_{t\downarrow 0} f(t)$ i es té*

$$\begin{aligned}L\{f'(t)\} &= \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_\epsilon^\infty e^{-st}f'(t)\,dt = \\ &= \lim_{\epsilon\downarrow 0}\left(e^{-st}f(t)\Big|_\epsilon^\infty + s\int_\epsilon^\infty e^{-st}f(t)\,dt\right) = \\ &= -f(0^+) + sL\{f(t)\} = sF(s) - f(0^+)\end{aligned} \tag{7}$$

Utilitzant únicament les dues propietats anteriors estem ja en condicions de resoldre alguns problemes de valor inicial per a equacions diferencials amb coeficients constants.

Exemple

Determinar la solució del problema de valor inicial

$$y'' + y = 5e^{2t} \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 1$$

Designant $L\{y(t)\}$ per $Y(s)$ es tindrà

$$\begin{aligned}L\{y''+y\} &= L\{y''\} + L\{y\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \\ &= (s^2+1)Y(s) - 2s - 1 = L\{5e^{2t}\} = \frac{5}{s-2}\end{aligned}$$

d'on podem trobar $Y(s$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1}\left(\frac{5}{s-2} + 2s + 1\right) = \frac{2s^2-3s+3}{(s^2+1)(s-2)}$$

i el nostre problema es redueix a saber que la funció $y(t)$ té aquesta transformada $Y(s)$. Si escrivim $Y(s)$ en la forma

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2+1} + \frac{1}{s-2} = \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s-2}$$

podem reconèixer en l'últim membre els termes

$$\frac{s}{s^2+1} = L\{\cos t\} \qquad \frac{1}{s^2+1} = L\{\sin t\} \qquad \frac{1}{s-2} = L\{e^{2t}\}$$

i per tant

$$L\{y(t)\} = Y(s) = L\{\cos t - \sin t + e^{2t}\}$$

i podem concloure que

$$y(t) = \cos t - \sin t + e^{2t}$$

admetent que les dues funcions a les que els coincideixen les transformades de Laplace també han de coincidir. Això és cert en els termes del següent resultat, demostració del qual ometem.

Teorema 2 (d'unicitat de la transformada de Laplace) *Si $f(t)$ i $g(t)$ són admissibles i $F(s) = G(s)$ per a tot s gran, llavors $f(t) = g(t)$ en cada punt on totes dues siguin contínues. En particular, si f i g són contínues per a tot $t \geq 0$, $f \equiv g$.*

Gràcies a aquest resultat podrem invertir la transformada de Laplace, és a dir, determinar $y(t)$ a partir de $Y(s)$, en nombroses ocasions sense necessitat de recórrer a una fórmula general d'inversió que requereix integració en el camp complexe. Només farà falta la funció donada $Y(s)$ en sumands que siguin transformades de funcions conegudes com en l'exemple anterior.

La nostra feina, tant per calcular transformades de Laplace com per invertir la transformació, es veurà facilitada per l'ús de les propietats que desenvolupem a continuació.

3 Altres propietats de la transformació de Laplace

Suposarem sempre que $f(t)$ és una funció admissible i designarem la seva transformada de Laplace per $F(s)$.

Propietat 3 (Integració)

$$L\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{F(s)}{s} \tag{8}$$

En efecte, amb $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)\mathrm{d}u$ es té $g'(t) = f(t)$, $g(0) = 0$, amb el que utilitzant la propietat de derivació

$$F(s) = L\{g'(t)\} = sL\{g(t)\} = sL\left\{\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right\}$$

Propietat 4 (Multiplicació per t)

$$L\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s) \tag{9}$$

En efecte,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st}(-t)f(t)\mathrm{d}t$$

Propietat 5 (Divisió per t) *Si $f(t)/t$ és admissible, i per això només fa falta que existeixi el límit $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$,*

$$L\{\frac{f(t)}{t}\} = \int_s^\infty F(u)\,du \tag{10}$$

En efecte, amb $g(t) = f(t)/t$, $f(t) = tg(t)$ i utilitzant la propietat anterior

$$F(s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}G(s)$$

d'on es segueix

$$\begin{aligned}\int_s^\infty F(u)\mathrm{d}u &= \lim_{A\to+\infty}\int_s^A F(u)\mathrm{d}u = \lim_{A\to+\infty}\int_s^A -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}G(u)du = \\ &= \lim_{A\to+\infty}(G(s)-G(A)) = G(s) = L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}\end{aligned} \tag{11}$$

havent utilitzat el fet, d'interès per sí mateix, de que si una funció $f(t)$ és admissible la seva transformada de Laplace satisfà

$$\lim_{s\to+\infty} F(s) = 0 \tag{12}$$

que és una conseqüència immediata de l'acotació

$$|F(s)| \leq \frac{M}{s-\gamma} \tag{13}$$

que és conseqüència de l'acotació (3).

Observi's que les propietats (4) i (5) són, en cert sentit, recíproques de les propietats (2) i (3). El mateix passa amb les propietats (6) i (7) anomenades a vegades propietats de traslació.

Propietat 6 (Multiplicació per $e^{\alpha t}$)

$$L\{e^{\alpha t}f(t)\} = F(s-\alpha) \tag{14}$$

En efecte,

$$\begin{aligned}L\{e^{\alpha t}f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{\alpha t}f(t)\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}f(t)\mathrm{d}t = F(s-\alpha)\end{aligned}$$

Propietat 7 (Traslació)

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t-a) & t\geq a \\ 0 & t<a\end{cases} \quad\Longrightarrow\quad L\{f(t)\} = e^{-\alpha s}F(s) \tag{15}$$

En efecte,

$$L\{\tilde{f}(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\tilde{f}(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)\mathrm{d}t$$

i fent $t-a=u$

$$L\{\tilde{f}(t)\} = \int_0^\infty e^{-su}e^{-sa}f(u)\mathrm{d}u = e^{as}F(s)$$

Propietat 8 (Canvi d'escala) *Sigui* $a>0$

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) \tag{16}$$

En efecte, fent $at = u$

$$\begin{aligned} L\{f(at)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(at)\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u} f(u)\frac{\mathrm{d}u}{a} = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) \end{aligned}$$

Propietat 9 (Funcions periòdiques) *Si* $f(t+T) = f(t)$,

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt}{1-e^{-st}} \tag{17}$$

En efecte,

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T e^{-st} f(t)\mathrm{d}t + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t$$

i fent $t = T + u$ en la última integral,

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^T e^{-st} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^\infty e^{-s(T+u)} f(T+u)\mathrm{d}u = \\ &= \int_0^T e^{-st} f(t)\mathrm{d}t + e^{-sT}\int_0^\infty e^{-su} f(u)\mathrm{d}u = \\ &= \int_0^T e^{-st} f(t)\mathrm{d}t + e^{-sT} F(s) \end{aligned}$$

obtenint-se així

$$F(s) = L\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)\mathrm{d}t}{1-e^{-st}}$$