

Transformada del $\sin(\omega_0 t)$

Lluís Batlle i Rossell *

4 de juliol de 2003

1 Treball analític

Podem calcular fàcilment la transformada de Fourier de $\sin(\omega t)$, utilitzant la seva forma exponencial. Així doncs, transformant, obtenim:

$$\begin{aligned}\mathcal{TF}[\sin(\omega_0 t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} e^{-j\omega t} dt = \\ &= -j \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t} dt\end{aligned}$$

Si recordem que l'antitransformada d'una delta desplaçada en freqüència (fàcil demostració, vist a [1]) és:

$$\mathcal{TF}^{-1}[\delta(\omega - \omega_0)] = e^{j\omega_0 t}$$

podem obtenir:

$$\mathcal{TF}[\sin(\omega_0 t)] = -j \frac{1}{2} (\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$$

2 L'explicació estranya

Molts a classe haureu vist que la transformada és tal com l'hem calculat abans. També haureu vist que la transformada del cosinus és (demostrat a [1]):

$$\mathcal{TF}[\cos(\omega_0 t)] = \frac{1}{2} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$

És típica la representació gràfica d'aquesta transformada amb un eix d'abscisses freqüencial, on hi ha dues deltes positives a les freqüències ω_0 i $-\omega_0$. De tota manera, també és típica la representació de la transformada del $\sin(\omega_0 t)$ utilitzant les mateixes

dues deltes, però essent negativa la de $-\omega_0$. El problema que té l'utilitzar aquesta representació és *quin és l'eix d'ordenades?*.

3 La justificació

L'eix que s'utilitza en les representacions freqüencials de la transformada del $\sin(\omega_0 t)$ i $\cos(\omega_0 t)$ sol ser el seu mòdul respecte a la freqüència (o pulsació, s'entén). Lògicament, representacions gràfiques més correctes haurien d'incloure la fase, però això comporta l'haver d'utilitzar tres dimensions. En el cas del cossinus es veu clar que la representació del mòdul és bona, però no pel sinus (seria la mateixa que el cossinus).

Així doncs, el que es fa és representar el sinus essent l'eix d'ordenades el de la component $\frac{1}{j} = -j$. O sigui, la part imaginària negada. Algú, intentant comprendre la gràfica del sinus, podria pensar que la delta negativa és la que està a ω_0 , però això és perquè ha suposat que l'eix d'ordenades és el de la component j .

Quan representem el sinus (igualment amb algunes representacions de modulacions en quadratura) sacrifiquem l'idea general de representar el mòdul de la transformada la freqüència per a diferenciar les components en fase i en quadratura (els sinus i els cossinus). Sovint, fins i tot, es barregen en una mateixa gràfica resultats amb eixos d'ordenades diferents; en principi és per què s'entenguin millor les coses.

Referències

- [1] Alan V. Oppenheim and Alan S. Willsky. *Señales y sistemas*. 1983.

*e-mail: vindicator@jazzfiesta.com